

Matematica Discreta- N.O.- Informatica- Appello 19/11/07

1. Utilizzando il principio di induzione completa , provare che

$$\forall n \geq 0 \quad \text{si ha: } 5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$$

2. Quanti sono gli studenti presenti in una assemblea se messi in fila per cinque ne restano fuori due, messi poi in fila per tredici ne rimangono fuori sette ed infine, messi in fila per otto ne restano fuori tre? Si stima che sono circa trecento.
(sugg. impostare un sistema di congruenze lineari da risolvere con il teorema cinese del resto)

3. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi si consideri la relazione $\mathcal{R}$ cosi' definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \mathcal{R} y \text{ se e solo se } 5 \mid 3x + 2y.$$

- a) Verificare che $\mathcal{R}$ e' di equivalenza ed e' compatibile con le operazioni $+$ e $\bullet$ di $\mathbb{Z}$.
- b) Descrivere l'insieme quoziente $\mathbb{Z} / \mathcal{R}$

4. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \bullet)$ e, una volta ordinati per inclusione, disegnare il diagramma di Hasse del reticolo da essi individuato.

Osservato che $[2]_{13}$ e' un generatore di $(\mathbb{Z}_{13}^*, \bullet)$ e che $[3]_9$ ha periodo 3 nel gruppo $(\mathbb{Z}_9, +)$, esplicitare il morfismo di gruppi $f: \mathbb{Z}_{13}^* \rightarrow \mathbb{Z}_9$ tale che $f([2]_{13}) = [3]_9$ e determinare i generatori di $\text{Im} f$.

5. Sull'insieme $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ si consideri la relazione $\mathcal{R}$ avente la seguente matrice di incidenza

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che $(X, \mathcal{R})$ e' un reticolo ordinato, disegnare il suo diagramma di Hasse e dire se e' distributivo, complementato. Il sottoinsieme $\{a, c, d, e, f\}$ e' un suo sottoreticolo?.